www.mathe-treff.de

Mathetreff: Lösungen der Knobelaufgaben

für die Klassen 9 und 10 (Sekundarstufe I)
Oktober bis Dezember 2019

Aufgabe 1

Vater und Sohn am Morgen

Wir bezeichnen die Geschwindigkeit des Vaters mit V und die Geschwindigkeit des Sohnes mit v. Den Weg von Jonas‘ Familienhaus bis zum Bäcker bezeichnen wir mit b. Den Weg vom Familienhaus bis zum Treffpunkt bezeichnen wir mit t (alle Angaben im km). Es gilt nun: $b = \sqrt{2} - 1$, da das gesamte, quadratische Stadtviertel zwei Quadratkilometer groß ist, und der quadratische Bezirk A eine Seitenlänge von 1km besitzt.
Jonas legt also insgesamt 2b zurück. Sein Vater legt insgesamt 2b +2t zurück. Zum Zeitpunkt des Treffpunktes hatte Jonas Vater 2b+t zurückgelegt und Jonas selbst t zurückgelegt. Vergleich man nun die Geschwindigkeiten, so ergibt sich.

$\frac{v}{V} = \frac{2b}{2b+2t} = \frac{b}{b+t}$ sowie $\frac{v}{V} = \frac{t}{2b+t}$

Gleichsetzen ergibt:

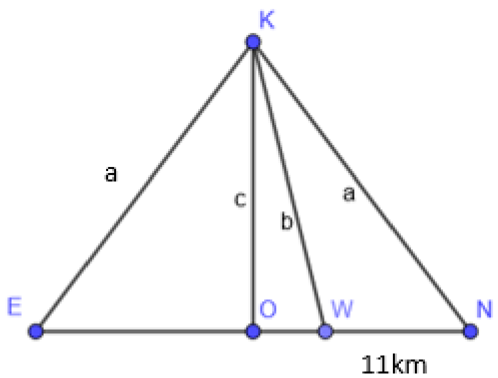
$$\frac{b}{b+t} = \frac{t}{2b+t} \leftrightarrow b(2b+t) = t(b+t) \leftrightarrow 2b^2 + bt = bt + t^2 \leftrightarrow 2b^2 = t^2$$

Also $t = b\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)\sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$. Somit ist der Vater insgesamt $2(b+t) = 2(\sqrt{2} - 1 + 2 - \sqrt{2}) = 2$ (Kilometer) gelaufen.

Aufgabe 2

Der Weihnachtsmann im Schneegestöber

In der folgenden Zeichnung bezeichnen wir das Einsiedlerhaus mit E, das Wichtelhaus mit W, das Haus des Weihnachtsmanns mit N, das Knusperhaus mit K. Die Strecke vom Einsiedlerhaus bis zum Wichtelhaus sei b, ebenso die Strecke vom Wichtelhaus bis zum Knusperhaus. Die Strecke vom Einsiedlerhaus bis zum Knusperhaus sei a, ebenso die Strecke vom Knusperhaus bis zum Haus des Weihnachtsmanns N. Gesucht ist also b.
Wir stellen fest, dass das Dreieck ENK ein gleichschenklig ist (mit den beiden gleich langen Schenkeln a). Daher gilt:
$\overline{E0} = \frac{b+11}{2}$, da $\overline{EW} = b$ und $\overline{WN} = 11\ (km)$



Da das Dreieck EOK rechtwinklig ist, gilt: $a^2 = \overline{EO}^2 + c^2$. Also zusammen gilt dann:

I) $a^2 - c^2 = \overline{EO}^2 = \left(\frac{b+11}{2}\right)^2 = \frac{(b+11)^2}{4}$

Außerdem gilt, da das Dreieck 0WK rechtwinklig ist:

II) $b^2 - c^2 = \overline{0W}^2 = \left(\frac{11-b}{2}\right)^2 = \frac{(11-b)^2}{4}$

Ziehen wir nun II von I ab, so erhalten wir
$a^2 - b^2 = \frac{(11+b)^2 - (11-b)^2}{4} = \frac{44b}{4} = 11b$, also $a^2 = b \cdot (b+11)$

Nun probieren wir systematisch Zahlen für b aus, sodass eine Quadratzahl entsteht. Letztendlich kommen wir zu dem Produkt $25 \cdot 36 = 900$, somit ist a = 30 und b = 25. Das heißt vom Wichtelhaus bis zum Knusperhäuschen wären es 25 Kilometer gewesen.

Aufgabe 3
2019 – eine Widmung

a) Schauen wir uns zunächst die Zeilen an. Hier stehen nur ungerade Zahlen, und zwar stehen in der n-ten Zeile die ungeraden Zahlen zwischen $8 \cdot (n-1)$ und 8n. Es gilt nun $2019 = 252 \cdot 8 + 3$. Daher steht 2019 in der 253-ten Zeile und in der 3. Spalte.

b) Betrachten wir zunächst die geraden Quadratenzahlen n^2. Diese Quadratzahlen haben die Koordinaten (n/1). Betrachten wir dann die ungeraden Quadratzahlen, so haben diese die Koordinaten (1/n).
Es gilt: $44^2 < 2019 < 45^2$ (1936 < 2019 < 2025). Also ist 2019 auf dem Streckenzug zwischen (44/1) und (1/45). Außerdem gilt: 2025 – 2019 = 6, d.h. 2019 ist 6 Stellen vor 2025, also hat 2019 die Koordinaten (1+6/45) = (7 /45).