www.mathe-treff.de

Mathetreff: Lösungen der Knobelaufgaben für die Oberstufe Oktober bis Dezember 2019

Aufgabe 1

Kekse in der Dose

Wir bezeichnen die Anzahl der Kekse in der Dose mit Rosinen mit n. Die Wahrscheinlichkeit, einen Keks mit Rosinen zu ziehen, ist daher $\frac{n}{5}$. Bei jedem Mal Ziehen gibt es also nur die Ausgänge „Keks mit Rosinen“ oder „Keks ohne Rosinen“.
Wir betrachten nun das Ereignis: „Alle gezogenen Kekse haben Rosinen“.
Ist nur ein Keks mit Rosinen in der Dose, so ist die Wahrscheinlichkeit für unser Ereignis:

$$p_1 = \left(\frac{1}{5}\right)^5 = \frac{1}{3125}$$

Sind zwei Kekse mit Rosinen in der Dose, so ist die Wahrscheinlichkeit für unser Ereignis:

$$p_2 = \left(\frac{2}{5}\right)^5 = \frac{32}{3125}$$

Sind drei Kekse mit Rosinen in der Dose, so ist die Wahrscheinlichkeit für unser Ereignis:

$$p_3 = \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \frac{243}{3125}$$

Sind vier Kekse mit Rosinen in der Dose, so ist die Wahrscheinlichkeit für unser Ereignis:

$$p_4 = \left(\frac{4}{5}\right)^5 = \frac{1024}{3125}$$

Sind fünf Kekse mit Rosinen in der Dose, so ist die Wahrscheinlichkeit für unser Ereignis:

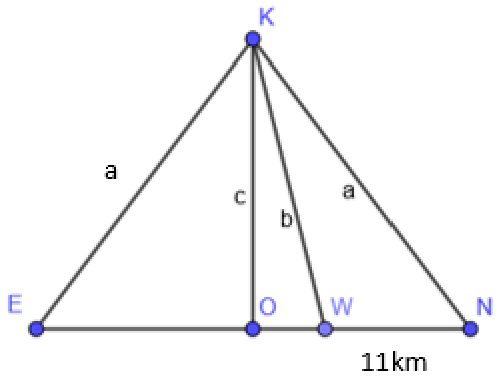
$$p_4 = 1$$

Das heißt das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten ist:
1 : 32 : 243 : 1024 : 3125.
Es gilt 1 + 32 + 243 + 1024 + 3125 = 4425
Die Wahrscheinlichkeit, dass sich genau ein Keks mit Rosinen in der Dose befindet, ist also: $\frac{1}{4425}$
Die Wahrscheinlichkeit, dass sich genau zwei Kekse mit Rosinen in der Dose befinden, ist also: $\frac{32}{4425}$
Die Wahrscheinlichkeit, dass sich genau drei Kekse mit Rosinen in der Dose befinden, ist also: $\frac{243}{4425}$
Die Wahrscheinlichkeit, dass sich genau vier Kekse mit Rosinen in der Dose befinden, ist also: $\frac{1024}{4425}$
Die Wahrscheinlichkeit, dass sich genau fünf Kekse mit Rosinen in der Dose befinden, ist also: $\frac{3125}{4425}$.

Aufgabe 2

Sportlicher Ehrgeiz

Lena trifft bei Stufe 0 die Gondel, in die ihre Familie eingestiegen ist. Die zweite Gondel, die vom Aussichtspunkt in Richtung Tal fährt, trifft Lena bei Stufe 70. Nach 70 Stufen müsste Lena also immer eine Gondel treffen, die talabwärts fährt, also bei 0, 70, 140, 210, 280, 350 usw., denn die Gondeln fahren gleichmäßig und regelmäßig.
Die Gondeln, die vom Tal in Richtung Aussichtspunkt fahren, trifft Lena bei Stufe 30, bei Stufe 70 + 50 = 120, bei 210, 300, 390, 480 usw.
Bei Stufe 210 treffen sich die beiden Gondeln auf halber Strecke. Insgesamt sind es also 420 Stufen.



Bezeichnen wir nun t als die Zeit, die Lena für ihren Aufstieg insgesamt benötigt, und bezeichnen wir g für die Zeit, die eine Gondel für ihre Berg- oder Talfahrt benötigt.
Bei Stufe 210 trifft Lena sowohl die aufwärts- als auch die abwärts fahrende Gondel. Dies ist genau die Hälfte des Aufstieges, d.h. bis hierher braucht sie 0,5t Minuten. Die Gondel haben in der Zeit schon 2,5 Fahrten und jeweils drei Halte (mit jeweils 1 Minute Aufenthalt) hinter sich. Daher gilt:
$\frac{t}{2} = 3 + g \cdot \frac{5}{2} \Leftrightarrow t = 6 + 5g$
Lena hat bis zur 30. Stufe (1. Treffpunkt) $\frac{t}{14}$ Minuten gebraucht. Die Gondel, in die ihre Familie einstieg, brauchte bis dahin $\frac{g}{14} + 1$, also gilt: $\frac{t}{14} = \frac{g}{14} + 1$, also t = g + 14 oder 5g + 6 = g + 14. Somit folgt 4g = 8, also g = 2 und t = 16.
Lena wird also für ihren Aufstieg 16 Minuten brauchen, während eine Gondel zwei Minuten benötigt.

Aufgabe 3
2019 – eine Widmung

a) Schauen wir uns zunächst die Zeilen an. Hier stehen nur ungerade Zahlen, und zwar stehen in der n-ten Zeile die ungeraden Zahlen zwischen $8 \cdot (n-1)$ und 8n. Es gilt nun $2019 = 252 \cdot 8 + 3$. Daher steht 2019 in der 253-ten Zeile und in der 3. Spalte.
b) Betrachten wir zunächst die geraden Quadratenzahlen n^2. Diese Quadratzahlen haben die Koordinaten (n/1). Betrachten wir dann die ungeraden Quadratzahlen, so haben diese die Koordinaten (1/n).
Es gilt: $44^2 < 2019 < 45^2$ (1936 < 2019 < 2025). Also ist 2019 auf dem Streckenzug zwischen (44/1) und (1/45). Außerdem gilt: 2025 – 2019 = 6, d.h. 2019 ist 6 Stellen vor 2025, also hat 2019 die Koordinaten (1+6/45) = (7 /45).
c) Betrachten wir die ungeraden Quadratzahlen $(2n-1)^2$. Diese haben die Koordinaten (n / 1-n), z.B: n = 1: 1→ (1/0) oder n = 2: 9 → (2/-1) oder n = 3: 25 → (3/-2) usw.
Es gilt, wie bereits in b) beschrieben: $45^2 = 2025$, also n = 23: 2025 → (23/-22)
2019 liegt 6 Schritte im Streckenzug vor 2025, also bei (23-6/-22)=(17/-22).