www.mathe-treff.de

Mathetreff: Lösungen der Knobelaufgaben

für die Klassen 9 und 10 (Sekundarstufe I)
Januar bis März 2020

Aufgabe 1

Gestapelte Fässer

Legt man drei Fässer wie beschreiben übereinander, sodass sich alle drei Fässer paarweise an ihrer breitesten Stelle berühren, so kann man das Problem auch zweidimensional betrachten.
Analog lassen sich somit drei Kreise mit identischem Durchmesser d betrachten, die sich paarweise berühren. Die Mittelpunkte der drei Kreise bilden ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlände d.
Die Höhe h ist somit $h=d+h_D$ mit h_T der Höhe des Tetraeders.
Mit Hilfe des Satz des Pythagoras lässt sich die Höhe des Dreiecks in Abhängigkeit vom Durchmesser d berechnen.

$$h_D^2=d^2-\frac{d^2}{4}=\frac{3}{4}d^2 \Leftrightarrow h_D=\frac{\sqrt{3}}{2}d$$

Somit ist ein Stapel Fässer aus zwei Schichten $d+\frac{\sqrt{3}}{2}d$ hoch. Da mit jeder weiteren Fässerreihe nur jeweils die Höhe des Tetraeders hinzu kommt, ergibt sich für vier Reihen gestapelter Fässer eine Höhe von $h_{Gesamt}=d+\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}d$.
Mit dem angegebenen Durchmesser von 70cm ergibt sich ein Höhe von

$$h_{Gesamt}=70+\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot 70\approx 251{,}87[cm].$$

Aufgabe 2

Gute Vorsätze für das neu Jahr

Das Problem lässt durch Reduktion auf einfache Fälle besser verstehen.
Betrachtet man zwei Punkte, so muss eine gerade Streckenanzahl vorliegen, um alle Strecken abfahren und am Startpunkt wieder enden zu können.
Betrachtet man drei Punkte, so ist die naheliegende Lösung jeweils eine Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten zu haben. Ist nun zwischen zwei Punkte eine zweite Strecken vorhanden, so kann man nicht mehr am Startpunkt enden, wenn man alle Strecken abläuft. Auch wenn man zwischen zwei weiteren Punkten eine zweite Strecke einzeichnet, so ist das Problem weiterhin nicht lösbar. Erst wenn zwischen allen Paaren von zwei Punkten jeweils zwei Strecken verlaufen, ist es lösbar.
Ergänzt man nun schrittweise weitere Verbindungsstrecken, so zeigt sich schnell, dass von jedem Punkt aus eine gerade Anzahl von Strecken ausgehen muss, damit das Problem lösbar ist.
Überträgt man diese Erkenntnis auf den Streckenplan von Herrn Maier, so erkennt man, dass von den Orten Alsdorf (8), Aldenhoven (6) und Baesweiler (6) jeweils eine gerade Anzahl an Strecken ausgeht. Von den Orten Ofden (3) und Herzogenrath (7) gehen jeweils eine ungerade Anzahl an Strecken aus. Somit kann es keine Fahrradroute geben, die in Alsdorf beginnt und endet und bei der alle Strecken genau einmal abgefahren werden.
Um eine solche Fahrradroute zu erhalten müsste entweder eine weitere Verbindungsstrecke zwischen Ofden und Herzogenrath eingeführt oder eine bestehende Strecke zwischen diesen beiden Orten gestrichen werden.

Aufgabe 3

Ein Zahlenrätsel

Teilt man diese sechsstellige Zahl x in ihre 1. Ziffer 1 und die restliche 5-stellige Zahl a, so lässt sich dies wie folgt ausdrucken: $x = 100000 + a$.
Gleichzeitig gilt für die zweite sechsstellige Zahl y, dass sie aus x durch das Streichen der 1. Ziffer und Anfügen dieser Ziffer am Ende der Zahl entsteht, also gilt: $y = 10 \cdot a + 1$.
Ferner wird gesagt, dass gelte: $y = 3x$.
Somit folgt: $10 \cdot a + 1 = 3 \cdot (100000 + a)$.
Nach einigen Umformungsschritten erhält man $7a = 3 \cdot 100000 - 1 \Leftrightarrow a = 42857$.
Für x und y ergibt sich damit: $x = 142857$, $y = 428571$.