www.mathe-treff.de

Mathetreff: Lösungen der Knobelaufgaben für die Oberstufe Januar bis März 2020

Aufgabe 1

Orangenzeit

Legt man vier Kugeln mit identischem Durchmesser wie in der Aufgabenstellung beschrieben hin, sodass sich die unteren drei Kugeln paarweise berühren und die vierte Kugel auf diesen drei Kugeln liegt, so bilden die Mittelpunkte der vier Kugeln ein Tetraeder mit der Kantenlänge d, dem Durchmesser der Kugeln.
Die Höhe von zwei Kugelschichten ist somit $d+h_T$ mit h_T der Höhe des Tetraeders.
Mit Hilfe des Satz des Pythagoras und trigonometrischen Funktionen in zwei geeigneten Dreiecken angewendet, lässt sich die Höhe des Tetraeders in Abhängigkeit vom Durchmesser d berechnen.

$$h_T^2+\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2=d^2 \Leftrightarrow h_T^2=\frac{2}{3}d^2 \Leftrightarrow h_T=\sqrt{\frac{2}{3}}d$$

Somit ist eine Pyramide aus zwei Schichten $d+\sqrt{\frac{2}{3}}d$ hoch. Da mit jeder weiteren Orangenschicht nur jeweils die Höhe des Tetraeders hinzukommt, ergibt sich für zehn Schichten Orangen eine Höhe von $d+9\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}d$.

Aufgabe 2

Gute Vorsätze für das neue Jahr

Das Problem lässt durch Reduktion auf einfache Fälle besser verstehen.
Betrachtet man zwei Punkte, so muss eine gerade Streckenanzahl vorliegen, um alle Strecken abfahren und am Startpunkt wieder enden zu können.
Betrachtet man drei Punkte, so ist die naheliegende Lösung jeweils eine Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten zu haben. Ist nun zwischen zwei Punkte eine zweite Strecke vorhanden, so kann man nicht mehr am Startpunkt enden, wenn man alle Strecken abläuft. Auch wenn man zwischen zwei weiteren Punkten eine zweite Strecke einzeichnet, so ist das Problem weiterhin nicht lösbar. Erst wenn zwischen allen Paaren von zwei Punkten jeweils zwei Strecken verlaufen, ist es lösbar.
Ergänzt man nun schrittweise weitere Verbindungsstrecken, so zeigt sich schnell, dass von jedem Punkt aus einer geraden Anzahl von Strecken ausgehen muss, damit das Problem lösbar ist.
Überträgt man diese Erkenntnis auf den Streckenplan von Herrn Maier, so erkennt man, dass von den Orten Alsdorf (12), Aldenhoven (6), Ofden (6) und Baesweiler (6) jeweils eine gerade Anzahl an Strecken ausgeht. Von den Orten Erberich (5) und Herzogenrath (7) gehen jeweils eine ungerade Anzahl an Strecken aus. Somit kann es keine Fahrradroute geben, die in Alsdorf beginnt und endet und bei der alle Strecken genau einmal abgefahren werden.
Um eine solche Fahrradroute zu erhalten müsste eine weitere Verbindungsstrecke zwischen Erberich und Herzogenrath eingeführt werden.

Aufgabe 3

Ein Zahlenrätsel

Die Zahl a lautet 7.
Mit folgenden Überlegungen kann die Zahl a eindeutig bestimmt werden:

Angenommen, die Zahl wäre nicht ganzzahlig (= ganzrational). Dann sind die Aussagen 2, 4 und 6 falsch und die Aussagen 1, 3 und 5 mussten wahr sein. Da es keine rationale Zahl gibt, deren Quadrat gleich 13 ist, können aber Aussagen 1 und 3 nicht gleichzeitig wahr sein.
Die Annahme a ist nicht ganzzahlig ist also falsch.
Demnach ist die gesuchte Zahl a ganzzahlig. Die Aussage 3 ist daher falsch und Aussage 4 ist somit richtig. Außerdem ist Aussage 1 richtig und Aussage 2 falsch. Eine durch 7 teilbare Zahl, die nicht durch 14 teilbar ist, muss ungerade sein. Die Aussage 6 ist daher falsch und die Aussage 5 ist richtig.
Die Zahl a ist also ganzzahlig und somit auch rational, ungerade und es gilt:

(1) $0 < a^3 + a < 8000$

Wäre a negativ, so wäre auch $a^3 + a$ negativ im Widerspruch zu (1). Für $a \geq 0$ folgt aus (1) $a^3 \leq a^3 + a < 8000$, also ist $a \leq 20$. Im Bereich 0 bis 20 gibt es nur eine durch 7 teilbare ungerade Zahl, nämlich $a = 7$. Tatsächlich sind für $a = 7$ die Aussagen 1, 4 und 5 wahr $(0 < 7^3 + 7 = 350 < 8000)$ und die Aussagen 2, 3 und 6 sind falsch.