www.mathe-treff.de

Mathetreff: Lösungen der Knobelaufgaben

für die Klassen 9 und 10 (Sekundarstufe I)
April bis Juni 2020

Aufgabe 1

Jahreszahl

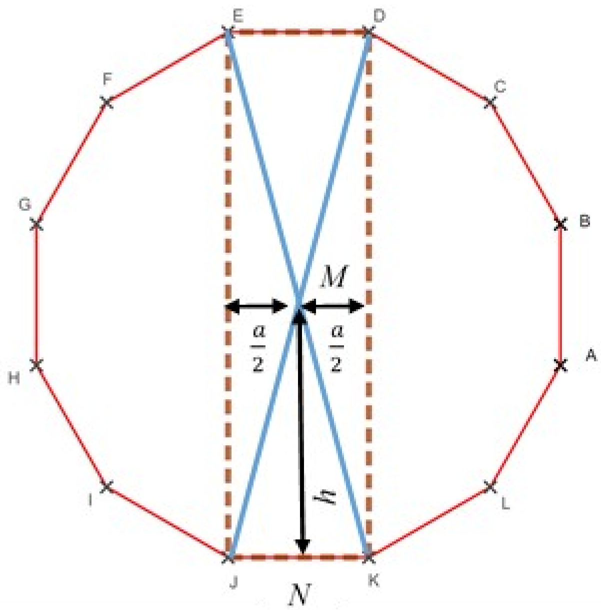
Man sieht sofort, dass 2020 = 5·404 ist. Dann erinnert man sich an ein pythagoreisches Zahlentripel (5, 12, 13). Dann ist y = 12·404 = 4848 und z = 13·404 = 5252.

Probe: $2020^2 + 4848^2 = 5252^2$. Eine weitere Begründung ist nicht gefordert, weil der Operator „bestimme" heißt.

Aufgabe 2

Opa Gustavs Zwölfeck

Gegeben ist ein regelmäßiges Zwölfeck (1) (siehe nichtmaßstäbliche Skizze). In dieses Zwölfeck ist das Rechteck DEJK eingezeichnet – siehe Skizze.



Man teilt das Rechteck DEJK in vier Dreiecke ein.
Die Dreiecke JKM und MDE sind aufgrund der Voraussetzung (1) kongruent.
Auch sind die Dreiecke JME und KDM wegen (1) kongruent.
Wegen (1) ist der Flächeninhalt des Dreiecks JKM $\frac{1}{12}$ des Flächeninhalts des Flächeninhalts des gegebenen regelmäßigen Zwölfecks groß. (2)
Weiterhin sei die Seitenlänge des regelmäßigen Zwölfecks $\overline{JK} = \overline{KL} = \ldots = \overline{IJ} = a$ und $\overline{NM} = h$.

Es gilt: $A_{\text{JME}} = A_{\text{JKM}} = \frac{a \cdot h}{2}$. (3)

Weiterhin gilt: $A_{\text{MDE}} = A_{\text{KDM}} = \frac{2h \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{a \cdot h}{2}$. (4)

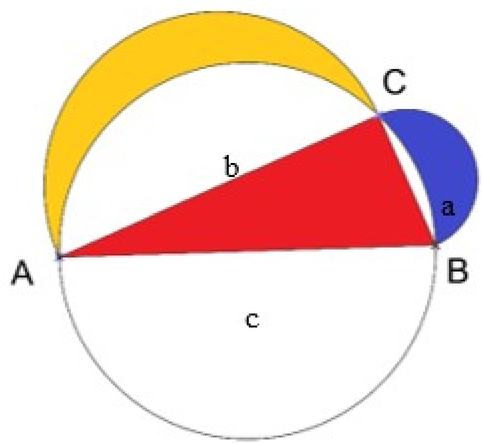
Für den Flächeninhalt des Rechteckes DEJK gilt dann: $A_{\text{DEJK}} = 2 \cdot A_{\text{MDE}} + 2 \cdot A_{\text{JME}}$.

$A_{\text{DEJK}} = 2 \cdot \frac{a \cdot h}{2} + 2 \cdot \frac{a \cdot h}{2} = 2a \cdot h$. Da $A_{\text{JKM}} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{1}{12} A_{Zwölfeck}$ gilt, ist

$A_{\text{DEJK}} = 2a \cdot h$ dann $4 \cdot \frac{1}{12} A_{Zwölfeck} = \frac{1}{3} A_{Zwölfeck}$.

Aufgabe 3

Kreise und Dreieck



Aufgrund der Aufgabenstellung ist das Dreieck ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C (Satz des Thales).

Seitenlängen des demnach rechtwinkligen Dreiecks sind wie üblich a, b, c, wobei der Satz des Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2$ gilt.
Flächenberechnung der Möndchen (gelbe und blaue Möndchen):
rotes Dreieck plus Halbkreis über b plus Halbkreis über a minus Halbkreis über c.

also: $A_{\text{Möndchen}} = \frac{a \cdot b}{2} + \frac{\pi \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} + \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} - \frac{\pi \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2}{2} = \frac{a \cdot b}{2} + \frac{\pi}{2}\left(\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right)$

nach dem Pythagoras ist $b^2 + a^2 - c^2 = 0$, somit ist auch $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = 0,$ also ist die Fläche der Möndchen $M = \frac{a \cdot b}{2}$, was der Fläche des Dreiecks entspricht.