www.mathe-treff.de

Mathetreff: Lösungen der Knobelaufgaben für die Oberstufe
April bis Juni 2020

Aufgabe 1

Jahreszahl

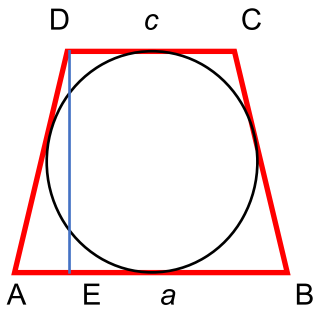
Die Jahreszahl 2020 ist ein ganz besonderes Jahr, weil man mit der Zahl 2020 pythagoreische Zahlentripel bilden kann.
Bestimmen Sie alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 = 2020^2$.
Mit Hilfe von Excel erhält man folgende Lösungen:

x	y	z
400	1980	2020
868	1824	2020
1212	1616	2020
1344	1508	2020
1508	1344	2020
1616	1212	2020
1824	868	2020
1980	400	2020

Aufgrund des Operators bestimme, ist dies eine zulässige Lösung und auch der erwartete Lösungsweg gewesen.

Aufgabe 2

Trapez



Es sei ABCD dass dem Kreis mit dem Radius r umschriebene gleichschenklige Trapez mit $\overline{AB} = a$ und $\overline{CD} = b$. Weiterhin ist E der Fußpunkt des von D auf Lotes $\overline{AB}$ gefällten Lotes.

Dann gilt: $\overline{AE} = \frac{a-c}{2}$. Weiterhin ist $\overline{DE} = 2r$.

Außerdem gilt auf Grund von Symmetrie-überlegungen: $\overline{AD} = \frac{a+c}{2}$.

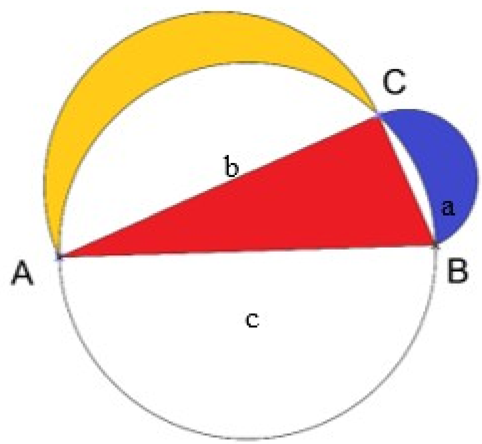
Da das Dreieck *AED* rechtwinklig ist, folgt aus

$$\left(\frac{a}{2}+\frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}-\frac{c}{2}\right)^2 + (2r)^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{4}+\frac{ac}{2}+\frac{c^2}{4} = \frac{a^2}{4}-\frac{ac}{2}+\frac{c^2}{4}+4r^2$$

$$\Leftrightarrow ac = 4r^2 \Leftrightarrow \frac{ac}{4}\pi = \pi r^2.$$

Aufgabe 3

Kreise und Dreieck



Aufgrund der Aufgabenstellung ist das Dreieck ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C (Satz des Thales).

Seitenlängen des demnach rechtwinkligen Dreiecks sind wie üblich a, b, c, wobei $c^2 = a^2 + b^2$ der Satz des Pythagoras gilt.
Flächenberechnung der Möndchen (gelbe und blaue Möndchen):
rotes Dreieck plus Halbkreis über b plus Halbkreis über a minus Halbkreis über c.

also: $A_{\text{Möndchen}} = \frac{a \cdot b}{2} + \frac{\pi \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} + \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} - \frac{\pi \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2}{2} = \frac{a \cdot b}{2} + \frac{\pi}{2}\left(\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right)$

nach dem Pythagoras ist $b^2 + a^2 - c^2 = 0$, somit ist auch $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = 0$, also ist die Fläche der Möndchen $M = \frac{a \cdot b}{2}$, was der Fläche des Dreiecks entspricht.