Mathetreff: Lösungen der Knobelaufgaben

für die Klassen 9 und 10 (Sekundarstufe I) Oktober bis Dezember 2020

Aufgabe 1

Adventskerzen

a)
Die Idee der Aufgabe stammt aus der Mathematik – Olympiade Aufgabe 370532
Um die Aufgabe zu lösen, schreibt man die Brenndauern der einzelnen Kerzen übersichtlich in einer Tabelle auf. Die Idee dabei ist, *eine* Kerze nur am 4. Advent eine Stunde brennen zu lassen und an den restlichen Adventssonntagen sie nicht zu benutzen. Dies geschieht mit folgender Brenndauerverteilung.

Kerzen	Erster Advent Brenndauer in Stunden	Zweiter Advent Brenndauer in Stunden	Dritter Advent Brenndauer in Stunden	Vierter Advent Brenndauer in Stunden	Brenndauer insgesamt in Stunden
Erste	1	0	1	1	3
Zweite	0	1	1	1	3
Dritte	0	1	1	1	3
Vierte	0	0	0	1	1

Aufgrund der Übersicht in der Tabelle ist es somit möglich, an den jeweiligen Adventsonntagen die richtige Anzahl der Kerzen brennen zu lassen und noch eine Kerze zwei Stunden an Silvester brennen zu lassen (vierte Kerze).

b)
Man hat vier Kerzen mit jeweils einer Brenndauer von 3 Stunden, dass ergibt eine Brenndauer von 12 Stunden. Da keine Brenndauer vorgeschrieben wurde, nur dass an jedem Adventssonntag die richtige Anzahl von Kerzen *jeweils gleich lang brennen*, sei x die Brenndauer in Stunden. Da am ersten Advent dann 1x, am zweiten 2x usw. gilt, folgt somit $x + 2x + 3x + 4\,x = 10x$. Die Kerzen sind also nach $10 \cdot x = 12$ vollständig abgebrannt, also gilt:
$x = \frac{12}{10}\,\mathrm{h} = \frac{6}{5}\,\mathrm{h} \triangleq 72\,\mathrm{min}$. Dies heißt, dass die Kerzen des Adventskranzes jeden Advent genau 72 Minuten abrennen. Jetzt muss nur noch eine Verteilung finden, so dass jede Kerze genau 3 Stunden, also 180 Minuten brennt dabei gilt: 180 min = 2,5·72 min = 5·36 min.

Kerzen	Erster Advent Brenndauer in Minuten	Zweiter Advent Brenndauer in Minuten	Dritter Advent Brenndauer in Minuten	Vierter Advent Brenndauer in Minuten	Brenndauer insgesamt in Minuten
Erste	72	0	36_1	72	180
Zweite	0	36_1	72	72	180
Dritte	0	72	36_2	72	180
Vierte	0	36_2	36_1 36_2	72	180

Dabei bedeutet: 36_1: Kerze brennt die ersten 36 Minuten, wird dann sie gelöscht und die Kerze 36_2 wird angezündet und brennt die zweiten 36 Minuten von den insgesamt 72 Minuten pro Advent. Diese obige Verteilung der Brenndauern zeigt, wie man die einzelnen Adventkerzen niederbrennen lassen müsste, um die Aufgabenstellung zu entsprechen.

Aufgabe 2

Weihnachtskugeln

Es sind insgesamt sechs Kugeln. Für die erste Kugel, dass diese eine rote Kugel ist, welche zweimal vorhanden ist, hat Theresa eine Wahrscheinlichkeit von $\mathrm{P}(\{\mathrm{r}\}) = \frac{2}{6}$. Da die Kugel nicht wieder in die Schachtel zurückgelegt wird, ändert sich natürlich auch die Anzahl der Kugeln, welche noch in der Schachtel sind.

Für die zweite Kugel gilt dann: $\mathrm{P}(\{\mathrm{r},\mathrm{ge}\}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}$, da eine gelbe Kugel vorhanden ist.

Das ist die Wahrscheinlichkeit, wenn Theresa zuerst eine rote, dann eine gelbe Kugel zieht.
Für die Wahrscheinlichkeit, dass Theresa zuerst eine rote, dann eine gelbe und zum Schluss eine blaue Kugel ohne zurücklegen zieht ergibt sich dann:

$\mathrm{P}(\{\mathrm{r},\mathrm{ge},\mathrm{b}\}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{60}$, da nur eine blaue Kugel vorhanden ist.

Aufgabe 3

Teelichter

a)
Wir fangen mit 999 Resten an und erhalten 999 : 8 = **124** + 7 Reste. Da jede der 124 Kerzen wieder einen Rest verursacht blieben nach dem ersten Gießdurchgang 124 + 7 = 131 Reste übrig.
Beim zweiten Gießdurchgang erhält man 131 : 8 = **16** Kerzen und es bleibt ein Rest von 3. Zusammen ergeben sich 19 Reste.
Beim dritten Gießdurchgang kann man aus diesen 19 : 8 = **2** Kerzen herstellen mit Rest 3, zusammen ergibt das 5 Reste.
Er kann insgesamt also 124 + 16 + 2 = 142 Kerzen gießen. Es bleiben leider noch 5 Reste übrig.

b) Ronald hat festgestellt, dass das abgekühlte Wachs in der Teelichtform ein kleineres Volumen hat, als das flüssige Wachs. Der Einfachheit halber gehen wir davon aus, dass das Teelicht exakt ein Zylinder ist (der Docht bleibt unberücksichtigt) und es beim Abkühlen 2% an Höhe und 3% am Durchmesser verliert. Wie viel Prozent weniger Volumen hat das abgekühlte Teelicht als das gerade noch flüssige Teelicht in der Teelichtform? Hinweis: Sollte die Formel für den Zylinder noch nicht bekannt sein, bitte den Zylinder als quadratische Säule betrachten.

Für das Volumen eines geraden Kreiszylinders mit dem Radius r und der Höhe h gilt:
$V_Z = \pi \cdot r^2 \cdot h$.
Verliert der Durchmesser 3% seiner ursprünglichen Länge, so verliert der Radius gemäß $d = 2r$ auch 3% seiner ursprünglichen Länge, das gilt analog für die Höhe h, diese verliert allerdings nur 2% ihrer ursprünglichen Höhe. Es bleiben also noch 97% des Radius und 98% der Höhe „übrig". Das bedeutet: $r_{\text{abgekühlt}} = 0{,}97 \cdot r$, und $h_{\text{abgekühlt}} = 0{,}98 \cdot h$.
Für das Volumen des abgekühlten Teelichtes folgt dann:
$V_{Z,\text{abgekühlt}} = \pi \cdot r_{\text{abgekühlt}}^2 \cdot h_{\text{abgekühlt}} = \pi \cdot (0{,}97\,r)^2 \cdot 0{,}98\,h \approx 0{,}922 \cdot V_Z$. Das Volumen des Teelichts hat sich nach dem Abkühlen um etwa 7,8% verkleinert.