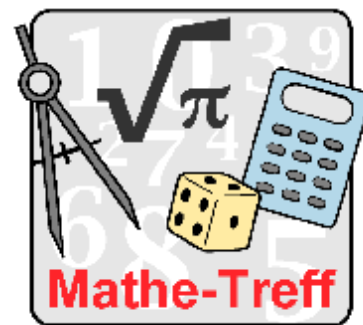




Aufgabe 1

Regentonnen

Die Anzahl an Liter Wasser in den Tonnen X, Y und Z vor dem Umgießen sei x , y und z . Nach dem Umgießen ist in allen Tonnen gleich viel Wasser also gilt:

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x + y\right) + z\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}x + y\right) = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x + y\right) + z\right) = 72.$$

Daraus ergeben sich durch Umformungen folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}41x + 3y + 12z &= 4320 \quad (1) \\x + 3y &= 288 \quad (2) \\und \quad x + 3y + 12z &= 1080 \quad (3).\end{aligned}$$

Subtrahiert man (2) von (3) ergibt sich $12z = 792$ und daraus $z = 66$. (3) von (1) subtrahiert ergibt $40x = 3240$, also gilt $x = 81$. x in (2) eingesetzt ergibt schlussendlich $y=69$.

Zu Beginn waren in den Regentonnen also 81l, 69l und 66l enthalten.

Aufgabe 2

Taschenrechner

$(\sqrt{3} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{3} + 1 = 4 + 2\sqrt{3}$ ist keine natürliche Zahl.

Aber $(\sqrt{12} + \sqrt{27})^2 = (\sqrt{3} \cdot \sqrt{4} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3})^2 = (2\sqrt{3} + 3\sqrt{3})^2 = (5\sqrt{3})^2 = 5^2 + \sqrt{3}^2 = 25 \cdot 3 = 75$ ist eine natürliche Zahl.

Aufgabe 3

Wer hat recht?

Wir formen die Gleichungen aus der Aufgabenstellung um:

$$\frac{2a}{x} + \frac{2}{y} = \frac{6}{xy} \quad (1) \quad \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = \frac{5}{xy} \quad (2)$$

$$2ay + 2x = 6 \text{ aus (1) und } 3y + 3x = 5 \text{ aus (2).}$$

$$\begin{aligned}\text{Weiterhin folgt: } 6ay + 6x &= 18 \quad (3) \\und \quad 6y + 6x &= 10 \quad (4).\end{aligned}$$

Wenn man nun (4) von (3) subtrahiert erhält man:

$$\begin{aligned}6ay - 6y &= 8 \\und \text{ weiter } 6y \cdot (a - 1) &= 8. \quad (5)\end{aligned}$$

An dieser Stelle machen wir eine Fallunterscheidung zwischen $a = 1$ und $a \neq 1$.

Fall 1: $a = 1$

Setzt man a in (5) ein ergibt sich $0 = 8$ was eine falsche Aussage ist, gibt es für diesen Fall keine Lösung.

Fall 2: $a \neq 1$

Aus (5) folgt

$$y = \frac{8}{6(a-1)} = \frac{4}{3(a-1)}.$$

Nun setzen wir y in (2) umgeformt ein, woraus sich

$$3 \cdot \frac{4}{3(a-1)} + 3x = 5$$

$$x = \frac{5}{3} - \frac{4}{3(a-1)}$$

$$x = \frac{5a-9}{3(a-1)} \quad \text{ergibt.}$$

Hier müssen wir wieder eine Fallunterscheidung über a machen.

Fall 2a: $5a - 9 = 0$

In x eingesetzt ergibt sich $x = \frac{0}{3(a-1)} = 0$. Dies ist ein Widerspruch zur Aufgabenstellung, daher gibt es keine Lösungen für $a = \frac{9}{5}$.

Fall 2b: $5a - 9 \neq 0$

Für diesen Fall gibt es eine unendlich große Menge an Zahlen in Abhängigkeit von a , die beide Gleichungen erfüllen.