www.mathe-treff.de

Mathetreff: Lösungen der Knobelaufgaben für die Oberstufe

April bis Juni 2022

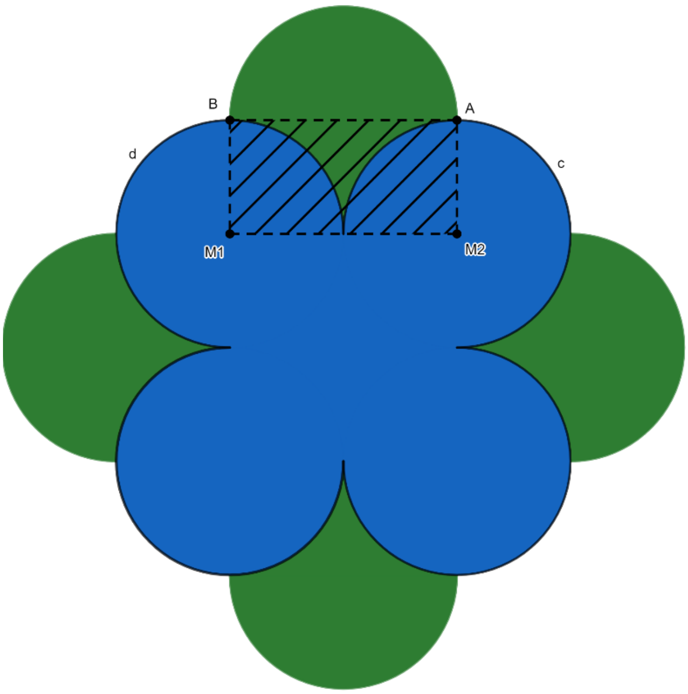
Aufgabe 1

Wandertour

In jedem Auto sind noch 2 Plätze frei, nachdem die vier Eltern mit ihren Kindern in den Autos sitzen. Es bleiben nun noch 6 Jugendliche, die auf die Autos verteilt werden müssen, übrig. Dafür gibt es die beiden Möglichkeiten in einem Auto 2 Plätze frei zu lassen oder in 2 Autos je einen Platz nicht zu besetzen.
Fall 1: In einem Auto sitzen nur 2 Personen. Die anderen 3 Autos sind mit jeweils 4 Personen besetzt. Wir beginnen damit, das Auto zu wählen, das mit nur einem Elternteil und einem Jugendlichen besetzt ist. Dafür gibt es 4 Möglichkeiten. Es bleiben 6 Jugendliche, die auf 3 Fahrzeuge verteilt werden müssen, übrig. Für das erste Auto gibt es nach n über k $\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}$, für das zweite $\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}$ und für das letzte $\frac{2\cdot 1}{2\cdot 1}$ Möglichkeiten.
Insgesamt gibt es für diesen Fall also $4\cdot\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}\cdot\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\cdot\frac{2\cdot 1}{2\cdot 1}=4\cdot\frac{6!}{8}=360$ Möglichkeiten.
Fall 2: In je 2 Autos bleiben 2 Plätze frei.
Es gibt $\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}$ Möglichkeiten die Autos, in denen ein Platz frei bleibt, auszuwählen. Die beiden Jugendlichen für diese beiden Autos auszuwählen sind 6 bzw. 5 Möglichkeiten. Wie bei Fall 1 gibt es für die 2 anderen Autos die Möglichkeiten $\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}$ bzw. $\frac{2\cdot 1}{2\cdot 1}$. Um die Möglichkeiten zu erhalten, muss wieder das Produkt der Möglichkeiten gebildet werden. Es gibt also $\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\cdot 6\cdot 5\cdot\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\cdot\frac{2\cdot 1}{2\cdot 1}=6\cdot\frac{6!}{4}=1080$ Möglichkeiten in diesem Fall.
Da nur diese beiden Fälle existieren ergibt sich durch Addition eine Gesamtzahl an $360+1080=1440$ Möglichkeiten.

Aufgabe 2

Der Schlossgarten



Wir berechnen zunächst die Fläche eines Blumenbeetes. Dafür benennen wir zwei nebeneinander liegende Kreise des Springbrunnens mit c und d. Den Mittelpunkt dieser Brunnenkreise benennen wir mit M_1 *und* M_2.
Seien nun A und B die Punkte, an dem der Halbkreis für das Blumenbeet auf die Brunnenkreise aufgesetzt sei. Nun zeichnen wir das Viereck M_1M_2AB.
Da der aufgesetzte Halbkreis den gleichen Radius wie die Brunnenkreise hat, sind die Strecken $\overline{M_1B}$ *und* $\overline{M_2A}$ parallel.
Da beide Kreise Radien der Länge 3 Meter haben, gilt $|M_1B| = |M_2A|$.
Die Strecke $\overline{AB}$ ist der Durchmesser des aufgesetzten Halbkreises und daher ergeben sich im Viereck M_1M_2AB zwei nebeneinander liegende rechte Winkel, da Radien zu Tangenten im selben Berührpunkt einen Winkel von 90° haben.

Zudem gilt |$M_1 M_2$| = |AB| =2r = 6m. Somit ist das Viereck $M_1 M_2 AB$ ein Rechteck. Damit sind die Kreisbögen von c und d im Viereck $M_1 M_2 AB$ jeweils ein Viertelkreis.
Der Flächeninhalt des Rechtecks $M_1 M_2 AB$ ist also genauso groß wie das Blumenbeet, da der aufgesetzte Halbkreis den gleichen Radius hat wie c und d. Somit ist der Flächeninhalt des Blumenbeetes $3m \cdot 6m = 18m^2$.
Alle Blumenbeete sind gleich groß, daher braucht Walter Blumen für $18m^2 \cdot 4 = 64m^2$.

Aufgabe 3

Taschenrechner

$\left(\sqrt{3}+1\right)^4 = \left(3+2\sqrt{3}+1\right)^2 = \left(4+2\sqrt{3}\right)^2 = 16+16\sqrt{3}+12 = 28+16\sqrt{3}$ ist keine natürliche Zahl.
Aber $\sqrt{\left(14+\sqrt{52}\right)\cdot\left(14-\sqrt{52}\right)} = \sqrt{196-14\sqrt{52}+14\sqrt{52}-52} = \sqrt{144} = 12$ ist eine natürliche Zahl.