www.mathe-treff.de

Mathetreff: Lösungen der Knobelaufgaben für die Klassen 9 und 10 (Sekundarstufe I)

Oktober bis Dezember 2022

© Bezirksregierung Düsseldorf

Aufgabe 1

Streichholzgitter

Für die b+1 Reihen mit waagerechten Streichhölzern benötigt man
$a \cdot (b+1)$ Hölzer.
Für die a+1 Spalten mit senkrechten Streichhölzern benötigt man $b \cdot (a+1)$ ·Hölzer.
Für ein (a×b) – Rechteckgitter sind demnach $a \cdot (b+1) + b \cdot (a+1)$Hölzer erforderlich.

Seien nun für eine beliebige Zahl u > 1 die Zahlen a und b gegeben durch
$a = \frac{1}{2} \cdot u \cdot (u+1), b = \frac{1}{2} \cdot u \cdot (u-1)$.
Es ist zu zeigen, dass für jede Wahl von u>1 für diese Zahlen a und b natürliche Zahlen sind und dass $a \cdot (b+1) + b \cdot (a+1) = a^2 + b^2$gilt.

Ist u ungerade, so sind u+1 und u-1 gerade, ist u gerade, so sind u+1 und u-1 ungerade.
Deshalb sind u·(u+1) und u·(u-1) gerade und daher a und b natürlich.
Aus $a = \frac{1}{2} \cdot u \cdot (u+1)$ und $b = \frac{1}{2} \cdot u \cdot (u-1)$ folgt a+b=u² und a-b=u.
Somit folgt: $(a-b)^2 = u^2 = a + b$ bzw. $a^2 - 2ab + b^2 = a + b$.
Daraus ergibt sich:$a^2 + b^2 = ab + b + ab + a = (a+1) \cdot b + a \cdot (b+1)$

Dies war zu zeigen.

Aufgabe 2

Geheimschrift

Blätterfall

Der Herbstwald raschelt um mich her.
Ein unabsehbar Blättermeer
Entperlt dem Netz der Zweige.
Du aber, dessen schweres Herz
Mitklagen will den großen Schmerz:
Sei stark, sei stark und schweige!

Du lerne lächeln, wenn das Laub
Dem leichteren Wind ein leichter Raub
Hinabschwankt und verschwindet.
Du weißt, dass just Vergänglichkeit
Das Schwert, womit der Geist der Zeit
Sich selber überwindet.

Christian Morgenstern

Aufgabe 3

Quadrat

Indem die Eckpunkte des Quadrates mit dem Punkt im inneren des Quadrates verbunden werden, wird jede der vier Flächen in zwei Dreiecke unterteilt.

Jeweils zwei dieser Dreiecke, nämlich diejenigen, die sich eine Seitenkante des Quadrates teilen, haben denselben Flächeninhalt. Dies gilt, da sie dieselbe Höhe (= Abstand zwischen der gemeinsamen Seitenkante und dem Punkt im Inneren) haben und nach Vorgabe jede Seitenkante genau halbiert ist.

Markieren der Dreiecke mit demselben Flächeninhalt liefert, dass die jeweils einander diagonal gegenüberliegenden unregelmäßigen Vierecke denselben Flächeninhalt besitzen. Somit hat das Quadrat einen Flächeninhalt von $116 cm^2$ und eine Kantenlänge von $\sqrt{116}$ cm≈10,77cm.