www.mathe-treff.de

Mathetreff: Lösungen der Knobelaufgaben für die Oberstufe

Oktober bis Dezember 2022

Aufgabe 1

Zahlenrätsel

Die Zahl 9721368 erfüllt alle Teilbarkeitsbedingungen der Aufgabe:
1 teilt 972368.
2 teilt 971368, da die Endziffer 8 gerade ist.
3 teilt 972168, da die Quersumme 33 durch 3 teilbar ist.
6 teilt 972138, da die Zahl gerade ist und die Quersumme 30 durch 3 teilbar ist.
7 teilt 921368, da 921368 = 7·131624.
8 teilt 972136, da für die Zahl aus den letzten drei Ziffern gilt: 136 = 8·17.
9 teilt 721368, da die Quersumme 27 durch 9 teilbar ist.

Es wird nun gezeigt, dass es keine Zahl N gibt, die größer als 9721368 ist und zugleich die geforderten Eigenschaften besitzt. Im Folgenden ist N(k) die Zahl, die entsteht, wenn man aus der Zahl N die Ziffer k streicht.

Da die Ziffer 0 nicht verwendet werden darf, kann auch die Ziffer 5 nicht in der Darstellung von N auftreten, da nach dem Streichen der Ziffer 5 die Zahl N(5) nicht durch 5 teilbar sein kann, denn sie müsste entweder mit der Ziffer 0 oder mit der Ziffer 5 enden.

Die Zahl N kann nicht aus allen verbleibenden acht Ziffern bestehen, denn die Quersumme von N(9) wäre dann 1+2+3+4+6+7+8 = 31, so dass N(9) nicht durch 9 teilbar sein kann. N kann also höchstens sieben Stellen besitzen. Streicht man eine dieser Ziffern, so ergibt sich nur im Fall des Streichens von 4 eine Quersumme, die durch 9 teilbar ist, nämlich 27.

Eine siebenstellige Zahl mit den geforderten Eigenschaften kann also nur aus den Ziffern 1, 2, 3, 6, 7, 8 und 9 bestehen.

Die letzte Ziffer von N kann nicht ungerade sein, denn beim Streichen jeder der drei geraden Ziffern k muss N(k) gerade sein. Streicht man diese letzte Ziffer, so erkennt man, dass aus dem gleichen Grund die vorletzte Ziffer gerade sein muss.

Damit kommen nur die Endziffernkombinationen 26, 28, 62, 68, 82 und 86 in Frage.

Die Zahl N(8) muss auch durch 4 teilbar sein. Aus diesem Grund kommen sowohl die Endziffernkombination 26 als auch 62 nicht in Frage, da diese Zahlen nicht durch 4 teilbar sind, was sie nach der bekannten Teilbarkeitsregel für 4 sein müssten.

Es bleiben also die vier Fälle 28, 68, 82 und 86 zu betrachten.

In allen vier Fällen endet N(8) auf Ziffer 2 oder auf Ziffer 6. Aus der Teilbarkeit von N(8) durch 8 und damit auch durch 4 folgt, dass die drittletzte Ziffer von N ungerade sein muss, denn: Nur die zweistelligen Zahlen 12,32,52, 72 und 92 bzw. 16, 36, 56, 76 und 96 sind durch 4 teilbar und enden mit der Einerziffer 2 bzw. 6.

Da nach dem Gezeigten 8 an der Einer- oder Zehnerstelle steht, müsste eine Zahl größer als 9721368, die die angegebenen Bedingungen erfüllt, auch mit der Ziffernkombination 97 beginnen. Untersucht man die vier Fälle der möglichen Endziffernkombinationen 28, 68,82 und 86 systematisch, so sind pro Fall nur noch vier Zahlen zu betrachten, denn in jedem dieser vier Fälle bleiben für die drei mittleren Stellen drei Ziffern. Dabei muss die drittletzte Ziffer von N ungerade sein.

Endziffernkombination 28 (Verbleibende Ziffern für die drei mittleren Stellen sind 6, 3 und 1.)
9763128: N(7) = 963128 = 137589 · 7 + 5 ist nicht durch 7 teilbar.
9761328: N(7) = 961328 = 137332 · 7 + 4 ist nicht durch 7 teilbar.
9736128: N(7) = 936128 = 133732 · 7 + 4 ist nicht durch 7 teilbar.
9716328 ist kleiner als 9721328
(Bemerkung: 9716328 erfüllt auch die gestellten Bedingungen.)

Endziffernkombination 68 (Verbleibende Ziffern für die drei mittleren Stellen sind 3, 2 und 1.)
9732168: N(7) = 932168 = 133166 · 7 + 6 ist nicht durch 7 teilbar.
9723168: N(7) = 923168 = 131881 · 7 + 1 ist nicht durch 7 teilbar.
9721368: erfüllt alle Eigenschaften (siehe oben).
9712368 ist kleiner als 9721368.

Endziffernkombination 82 (Verbleibende Ziffern für die drei mittleren Stellen sind 6, 3 und 1.)
9763182: N(7) = 963182 = 137597 · 7 + 3 ist nicht durch 7 teilbar.
9761382: N(7) = 961382 = 137340 · 7 + 2 ist nicht durch 7 teilbar.
9736182: N(7) = 936182 = 133740 · 7 + 2 ist nicht durch 7 teilbar.
9716382 ist kleiner als 9721368.

Endziffernkombination 86 (Verbleibende Ziffern für die drei mittleren Stellen sind 3, 2 und 1.)
9732186: N(7) = 932186 = 133169 · 7 + 3 ist nicht durch 7 teilbar.
9723186: N(7) = 923186 = 131883 · 7 + 5 ist nicht durch 7 teilbar.
9721386: N(7) = 921386 = 131626 · 7 + 4 ist nicht durch 7 teilbar.
9712386 ist kleiner als 9721368.

Da alle Fälle vollständig behandelt wurden, ist gezeigt, dass 9721368 die größte Zahl mit den geforderten Eigenschaften ist.

Aufgabe 2

Geheimschrift

Blätterfall

Der Herbstwald raschelt um mich her.
Ein unabsehbar Blättermeer
Entperlt dem Netz der Zweige.
Du aber, dessen schweres Herz
Mitklagen will den großen Schmerz:
Sei stark, sei stark und schweige!

Du lerne lächeln, wenn das Laub
Dem leichteren Wind ein leichter Raub
Hinabschwankt und verschwindet.
Du weißt, dass just Vergänglichkeit
Das Schwert, womit der Geist der Zeit
Sich selber überwindet.

Christian Morgenstern

Aufgabe 3

Primzahlen

Wir teilen die natürlichen Zahlen ≥ 4 in Dreierblöcke ein: (4, 5, 6), (7, 8, 9), (10, 11, 12), …
Der n-te Dreierblock besteht dabei aus den Zahlen 3n+1, 3n+2 und 3n+3 (n ≥ 1).

In jedem Dreierblock ist die größte Zahl $3n+3$ durch 3 teilbar (und größer als 3), also keine Primzahl. Von den beiden aufeinander folgenden Zahlen $3n+1$ und $3n+2$ ist genau eine gerade (und größer als 2), also ebenfalls keine Primzahl. Daher gibt es in jedem Dreierblock höchstens eine Primzahl.

Nun ist jede Primzahl $p \geq 5$ in einem der Dreierblöcke enthalten. Falls sich die Primzahl p im n-ten Block befindet, ist also ihre Nummer $\leq n$.

Wegen $p = 3n+1$ oder $p = 3n+2$ folgt: $p > 3n \geq 3 \cdot$ Nummer von p.

Dies war zu zeigen.