www.mathe-treff.de

Mathetreff: Lösungen der Knobelaufgaben

für die Oberstufe

Juli bis September 2023

© Mathematik-Treff

Aufgabe 1

Zahlenfolge

Bei der Folge weist starke Ähnlichkeit mit der sogenannten Fibonacci-Folge, sodass ihre rekursive Darstellung $a_{n+1}=a_{n-1}+a_n, \forall\, n\in\mathbb{N}$ lautet.

Für die explizite Darstellung wird die rekursive Darstellung passend umgeformt. Es sei $a_1=2, a_2=4, a_3=6, a_4=10, a_5=16, a_6=26, a_7=42\ldots$

$$
\begin{aligned}
a_3&=a_1+a_2\\
a_4&=a_2+a_3=1\cdot a_1+2\cdot a_2\\
a_5&=a_3+a_4=2\cdot a_1+3\cdot a_2\\
a_6&=a_4+a_5=3\cdot a_1+5\cdot a_2\\
a_7&=a_5+a_6=5\cdot a_1+8\cdot a_2\\
a_8&=a_6+a_7=8\cdot a_1+13\cdot a_2\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Betrachtet man die roten Zahlen genauer, so erkennt man, dass diese den Zahlen (f_n) der Fibonacci-Folge entsprechen. Es folgt somit $a_{n+1}=f_{n-1}\cdot a_1+f_n\cdot a_2, \forall\, n\in\mathbb{N}$.

Mit der Formel von Moivre-Binet für die explizite Darstellung der Fibonacci-Folge $f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ ergibt sich

$$a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)\cdot a_1+\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)\cdot a_2\right], \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Es ist also $a_{37}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{36}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{36}\right)\cdot 2+\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{37}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{37}\right)\cdot 4\right]=126491972.$

Nun zum **Grenzwert** x der Quotientenfolge.

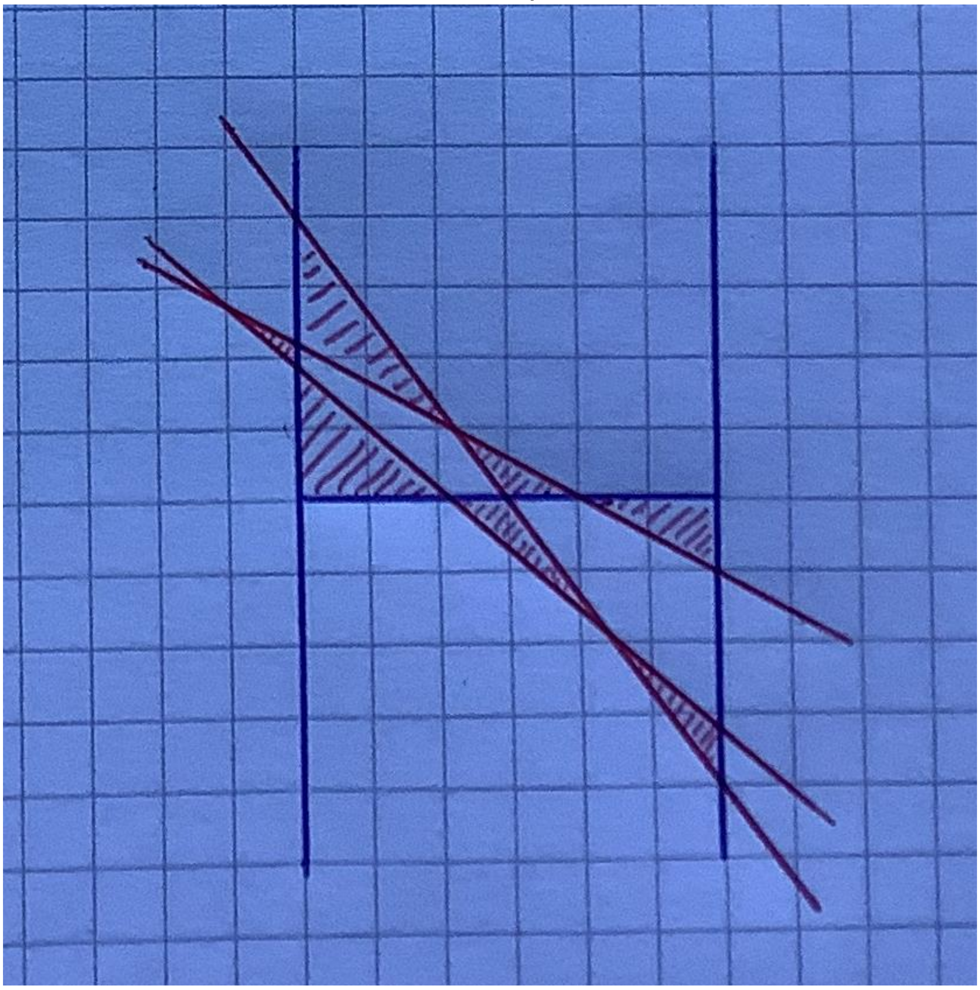
$$x=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n-1}+a_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n-1}}{a_n}+1=1+\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}}=1+\frac{1}{x}$$

Dies führt zu der Gleichung $x=1+\frac{1}{x}\Leftrightarrow x^2-x-1=0$, deren Lösung dem goldenen Schnitt $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}6180339887$ entspricht.

Aufgabe 2

Ein H schneiden

Die maximale Anzahl ist sieben. Beispielsweise so:



© Tobias Rüßmann, Mathematik-Treff

Unabhängig vom H können die drei Geraden drei Fälle annehmen.

1. Die drei Geraden bilden ein Dreieck.
2. Die drei Geraden haben genau einen Schnittpunkt.
3. Mindestens zwei der Geraden sind parallel.

Es ist offensichtlich, dass der dritte Fall nicht die maximale Anzahl liefern kann.

Der zweite Fall kann nur die maximale Anzahl liefern, wenn der Schnittpunkt zwischen den beiden Parallelen des H liegt. Hier kommt es maximal zu sechs Dreiecken, wenn der Schnittpunkt auf dem Querbalken liegt und keine der drei Geraden den Querbalken enthält.

Im ersten Fall kann es sogar zu sieben Dreiecken kommen. Hierfür liegen die drei Geraden so, dass zwei Ecken zwischen den Parallelen und einer außerhalb der Parallelen liegt. So entstehen zunächst drei Dreiecke und zwei Vierecke.

Der Querbalken kann nun Vierecke in zwei Dreiecke zerlegen oder zwei Dreiecke mit zusammenfallender Spitze in vier Dreiecke zerlegen, sowie unendliche Gebiete zerlegen, sodass neue Dreiecke entstehen.

Durch geschicktes legen des Querbalkens, sowie eventuell einer Drehung oder Parallelverschiebung der drei Geraden, können so maximal sieben Dreiecke entstehen.

Aufgabe 3

Vier Roboter

Treffpunkt:

Da jeder Roboter sich immer direkt auf einen anderen zufährt und niemals zwei Roboter gegenseitig aufeinander zufahren, müssen sich die Roboter aus Gründen der Symmetrie in der Mitte des Raumes treffen.

Strecke:

Es sei $A(x/y)$ die Position des ersten Roboters. Dann ist wegen der Symmetrie die Position des zweiten Roboters $B(y/-x)$. Da der erste Roboter sich stets auf dem zweiten Roboter ausrichtet, ist die Gerade durch A und B eine Tangente zur Fahrtstrecke des Roboters.

Die Steigung der Tangente ist dann $m_t=\frac{-y-x}{y-x}=\frac{y+x}{x-y}$.

Somit ist $b'=\frac{a+b}{b-a}$ die Differentialgleichung zur gesuchten Funktion. Sie kann mit der Substituion $z:=\frac{b}{a}$ gelöst werden. Diese Differentialgleichung kann auch ein Computerprogramm lösen und man erhält als Lösungen:

$$(1)\,x=Cx\sqrt{y^2-2xy-x^2} \qquad (2)\,x=\frac{y}{\sqrt{2}+1} \qquad (3)\,x=\frac{y}{\sqrt{2}-1}$$

mit C – Konstante und $y=y(x)$.